

Examenul național de bacalaureat 2025

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră numerele complexe $z_1 = 4 + i$ și $z_2 = 2 - 4i$. Arătați că $i \cdot z_1 + z_2 = 1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 5$. Determinați numerele reale a pentru care punctul $A(a, 5)$ aparține graficului funcției f .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_6(7x - 5) = \log_6(x + 1) + \frac{1}{\log_x 6}$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu impar al lui 9.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 0)$, $B(2, 4)$ și $C(5, a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , știind că dreptele OB și AC sunt paralele.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , cu $AB = 6$, $BC = 10$ și $\cos B = \frac{4}{5}$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 18.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \\ -x & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det A = 1$.
- 5p** b) Arătați că $A - B(x) \cdot A = xI_3$, pentru orice număr real x .
- 5p** c) Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $C(x)$ astfel încât $A \cdot C(x) = B(x)$. Arătați că $C(x) - C(y) = (y - x)A$, pentru orice numere reale x și y .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x^2 y + xy^2 + x + y$.
- 5p** a) Arătați că $1 * 3 = 16$.
- 5p** b) Determinați numerele reale nenule x pentru care $x * \frac{2}{x} = 9x$.
- 5p** c) Determinați perechile (m, n) de numere întregi, cu $m \leq n$, pentru care $m * n = 1$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x^3}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{1 - 3 \ln x}{x^4}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Determinați mulțimea numerelor reale m pentru care ecuația $f(x) = m$ are cel puțin o soluție.

	2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + x^2 - 1$.
5p	a) Arătați că $\int_1^4 (f(x) - e^x) dx = 18$.
5p	b) Arătați că $\int_1^2 \frac{e^x}{f(x) - x^2} dx = \ln(e + 1)$.
5p	c) Demonstrați că $\int_0^1 \frac{x}{f(x) + 1} dx \leq 1 - \frac{2}{e}$.

Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$i \cdot z_1 + z_2 = 4i + i^2 + 2 - 4i =$ $= -1 + 2 = 1$	3p 2p
2.	$f(a) = 5$, de unde obținem $a^2 - 3a = 0$ $a = 0$ sau $a = 3$	3p 2p
3.	$\log_6(7x - 5) = \log_6(x^2 + x)$, deci $7x - 5 = x^2 + x$, de unde obținem $x^2 - 6x + 5 = 0$ $x = 1$, care nu convine, sau $x = 5$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre, numerele 27, 45, 63, 81 și 99 sunt multipli impari de 9, deci sunt 5 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$	2p 3p
5.	$m_{OB} = 2$ $m_{AC} = \frac{a}{3}$ și, cum $m_{OB} = m_{AC}$, obținem $a = 6$	2p 3p
6.	$\sin B = \frac{3}{5}$ $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin B}{2} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \frac{3}{5} = 18$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot (-1) \cdot 0 - 0 \cdot (-1) \cdot 0 =$ $= 0 + 1 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$	3p 2p
b)	$B(x) \cdot A = \begin{pmatrix} -x & 0 & 1 \\ -1 & -x & 0 \\ 0 & -1 & -x \end{pmatrix}$, $A - B(x) \cdot A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} =$ $= x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = xI_3$, pentru orice număr real x	3p 2p
c)	$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C(x) = A^{-1} \cdot B(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -x \\ x & 0 & -1 \\ 1 & x & 0 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x $C(x) - C(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -x+y \\ x-y & 0 & 0 \\ 0 & x-y & 0 \end{pmatrix} = (y-x)A$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p

2.a)	$1 * 3 = 1^2 \cdot 3 + 1 \cdot 3^2 + 1 + 3 =$ $= 3 + 9 + 4 = 16$	3p 2p
b)	$x * \frac{2}{x} = \frac{3x^2 + 6}{x}$, pentru orice număr real nenul x $\frac{3x^2 + 6}{x} = 9x$, de unde obținem $x = -1$ sau $x = 1$, care convin	3p 2p
c)	$m * n = (m + n)(mn + 1)$, pentru orice numere întregi m și n $(m + n)(mn + 1) = 1$ și, cum m și n sunt numere întregi, cu $m \leq n$, obținem perechile $(0, 1)$ și $(-2, 1)$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\frac{1}{x} \cdot x^3 - 3x^2 \ln x$ $f'(x) = \frac{x}{x^6} =$ $= \frac{x^2 - 3x^2 \ln x}{x^6} = \frac{1 - 3 \ln x}{x^4}, x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{3x^2} = 0$ Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	3p 2p
c)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{e}$; pentru orice $x \in (0, \sqrt[3]{e}]$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $(0, \sqrt[3]{e}]$ și, pentru orice $x \in [\sqrt[3]{e}, +\infty)$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[\sqrt[3]{e}, +\infty)$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$, $f(\sqrt[3]{e}) = \frac{1}{3e}$ și f este continuă, deci mulțimea numerelor reale m pentru care ecuația $f(x) = m$ are cel puțin o soluție este $\left(-\infty, \frac{1}{3e}\right]$	2p 3p
2.a)	$\int_1^4 (f(x) - e^x) dx = \int_1^4 (x^2 - 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x\right) \Big _1^4 =$ $= \frac{64}{3} - 4 - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = 18$	3p 2p
b)	$\int_1^2 \frac{e^x}{f(x) - x^2} dx = \int_1^2 \frac{e^x}{e^x - 1} dx = \int_1^2 \frac{(e^x - 1)'}{e^x - 1} dx = \ln(e^x - 1) \Big _1^2 =$ $= \ln(e^2 - 1) - \ln(e - 1) = \ln(e + 1)$	3p 2p
c)	$\int_0^1 \frac{x}{f(x) + 1} dx = \int_0^1 \frac{x}{e^x + x^2} dx$ și, cum $e^x + x^2 \geq e^x$, pentru orice $x \in [0, 1]$, obținem relația $\int_0^1 \frac{x}{f(x) + 1} dx \leq \int_0^1 x e^{-x} dx$ $\int_0^1 x e^{-x} dx = \int_0^1 x (-e^{-x})' dx = -e^{-x} (x + 1) \Big _0^1 = 1 - \frac{2}{e}$, deci $\int_0^1 \frac{x}{f(x) + 1} dx \leq 1 - \frac{2}{e}$	3p 2p

Examenul național de bacalaureat 2025

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați termenul b_1 al progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, în care $b_3 = 40$ și $b_4 = 80$.
- 5p 2. Determinați mulțimea numerelor reale m pentru care graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + m$ intersectează axa Ox în două puncte distincte.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x + 2 \cdot 3^{x+1} = 63$.
- 5p 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de două cifre, n^2 să fie număr natural de trei cifre.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$, $B(7,4)$ și C , astfel încât $\overline{AB} = 2\overline{AC}$. Determinați coordonatele punctului D pentru care $\overline{OD} = \overline{CB}$.
- 5p 6. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC , cu $AB = 10$, înălțimea $AD = 8$ și distanța de la punctul D la dreapta AC egală cu $4\sqrt{2}$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 56.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & -a \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax + y - az = 1 \\ 3x + y - 2z = 1 \\ x - 3y + az = -3 \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = -2$.
- 5p b) Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care sistemul are soluție unică.
- 5p c) Pentru $a = 1$, determinați soluțiile (x_1, y_1, z_1) și (x_2, y_2, z_2) ale sistemului de ecuații pentru care $y_1 = x_2$ și $z_1 = y_2$.
2. Pe mulțimea $M = (0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = \sqrt{xy} + \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{x+y}{2} - 2$.
- 5p a) Arătați că $1 * 4 = 3$.
- 5p b) Determinați $x \in M$ pentru care $x * x = 1$.
- 5p c) Demonstrați că mulțimea $[1, +\infty)$ este parte stabilă a mulțimii M în raport cu legea de compoziție „ $*$ ”.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x-2}{x+2} + \ln \frac{x+2}{x}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{4(x-1)}{x(x+2)^2}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Determinați numerele naturale n pentru care ecuația $f(x) = n$ nu are soluții.

	2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{2x^2 + 1}$.
5p	a) Arătați că $\int_{-1}^2 (2x^2 + 1)f(x) dx = 3$.
5p	b) Arătați că $\int_0^2 \sqrt{f(x)} dx = 1$.
5p	c) Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(\sqrt{e^x})} dx$. Arătați că
	$(n+1)I_n - I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{n+2} + \frac{1}{e}$, pentru orice număr natural nenul n .

Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$q = \frac{b_4}{b_3} = 2$, unde q este rația progresiei geometrice	2p
	$b_1 = \frac{b_3}{q^2}$, deci $b_1 = \frac{40}{4} = 10$	3p
2.	$f(x) = 0$ are două soluții reale distincte, deci $4 - 4m > 0$	3p
	$m \in (-\infty, 1)$	2p
3.	$3^x + 6 \cdot 3^x = 63$, deci $3^x = 9$	3p
	$x = 2$	2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	2p
	Cum $10^2 \leq n^2 \leq 31^2$, obținem 22 de cazuri favorabile, deci $p = \frac{22}{90} = \frac{11}{45}$	3p
5.	$\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AB} = 6\vec{i} + 2\vec{j}$	3p
	$\overrightarrow{OD} = 3\vec{i} + \vec{j}$, deci punctul D are coordonatele $(3, 1)$	2p
6.	$DC = 8$, $BD = 6$	3p
	$BC = 14$ și $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{14 \cdot 8}{2} = 56$	2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} =$	2p
	$= 0 - 2 + 0 - 0 - 0 - 0 = -2$	3p
b)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} a & 1 & -a \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & a \end{vmatrix} = a^2 + a - 2$, pentru orice număr real a	2p
	$\det(A(a)) = 0 \Leftrightarrow a = -2$ sau $a = 1$, deci sistemul de ecuații are soluție unică dacă și numai dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$	3p
c)	Pentru $a = 1$, soluțiile sistemului de ecuații sunt $(\alpha, \alpha + 1, 2\alpha)$, cu $\alpha \in \mathbb{C}$	2p
	$\alpha_1 + 1 = \alpha_2$ și $2\alpha_1 = \alpha_2 + 1$, de unde obținem $\alpha_1 = 2$ și $\alpha_2 = 3$, deci soluțiile sunt $(2, 3, 4)$ și $(3, 4, 6)$	3p

2.a)	$1 * 4 = \sqrt{1 \cdot 4} + \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 4}} + \frac{1+4}{2} - 2 =$	3p
	$= 2 + \frac{1}{2} + \frac{5}{2} - 2 = 3$	2p
b)	$x * x = \frac{2x^2 - 2x + 1}{x}$, pentru orice $x \in M$	2p
	$\frac{2x^2 - 2x + 1}{x} = 1$, deci $2x^2 - 3x + 1 = 0$, de unde obținem $x = \frac{1}{2}$ sau $x = 1$, care convin	3p
c)	$x * y = \frac{(\sqrt{xy} - 1)^2}{\sqrt{xy}} + \frac{x+y}{2} \geq \frac{x+y}{2}$, pentru orice $x, y \in M$	3p
	Pentru $x, y \in [1, +\infty)$, rezultă $\frac{x+y}{2} \geq 1$, deci $x * y \in [1, +\infty)$, de unde obținem că $[1, +\infty)$ este parte stabilă a mulțimii M în raport cu legea de compoziție „ $*$ ”	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{2(x+2) - (2x-2)}{(x+2)^2} + \frac{x}{x+2} \cdot \frac{x - (x+2)}{x^2} =$	3p
	$= \frac{6}{(x+2)^2} - \frac{2}{x(x+2)} = \frac{4(x-1)}{x(x+2)^2}$, $x \in (0, +\infty)$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-2}{x+2} + \ln \frac{x+2}{x} \right) = 2 + 0 = 2$	3p
	Dreapta de ecuație $y = 2$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$; pentru orice $x \in (0, 1]$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $(0, 1]$ și, pentru orice $x \in [1, +\infty)$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[1, +\infty)$	2p
	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, $f(1) = \ln 3$, f este continuă și, cum $1 < \ln 3 < 2$, obținem $n = 0$ sau $n = 1$	3p
2.a)	$\int_{-1}^2 (2x^2 + 1) f(x) dx = \int_{-1}^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big _{-1}^2 =$	3p
	$= \frac{8}{3} - \left(-\frac{1}{3} \right) = 3$	2p
b)	$\int_0^2 \sqrt{f(x)} dx = \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 1}} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{(2x^2 + 1)'}{2\sqrt{2x^2 + 1}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{2x^2 + 1} \Big _0^2 =$	3p
	$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$	2p
c)	$I_n = \int_0^1 x^n (2 + e^{-x}) dx$, $(n+1)I_n - I_{n+1} = \int_0^1 ((n+1)x^n - x^{n+1}) (2 + e^{-x}) dx =$	2p
	$= 2x^{n+1} \Big _0^1 - \frac{2x^{n+2}}{n+2} \Big _0^1 + \int_0^1 (x^{n+1} e^{-x})' dx = 2 - \frac{2}{n+2} + x^{n+1} e^{-x} \Big _0^1 = \frac{2(n+1)}{n+2} + \frac{1}{e}$, pentru orice număr natural nenul n	3p